

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО



ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЗА ТЕМАМИ: «ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ»,
«ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ
ФОРМ НАВЧАННЯ З ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ
(ІІ СЕМЕСТР)

Варіанти контрольних робіт з навчальної дисципліни «Вища математика»
за темами: «Функції кількох змінних», «Інтегральне числення» для студентів І
курсу денної та заочної форм навчання з технічних спеціальностей (ІІ семестр)

Укладачі: проф. В.П. Ляшенко, доц. В.М. Сапцін, доц. Г.В. Славко,
доц. Н.Г. Кирилах, старш. викл. Т.А. Набок, асист. А.І. Дерієнко

Рецензент проф., к.ф.-м.н. В.О. Семенов

Кафедра інформатики і вищої математики

Затверджено методичною радою КрНУ

Протокол № _____ від “ _____ ” _____ 2010 р.

Заступник голови методичної ради _____ доц. С.А. Сергієнко

Завдання 1 Обчислити значення частинних похідних.

1. а) $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $M_0(0, -1, 1)$; б) $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$; в) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, $M_0(2, 1, 1)$.
2. а) $f(x, y, z) = \ln(x + \frac{y}{2z})$, $M_0(1, 2, 1)$; б) $u = \ln(e^x + e^{-y})$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, $M_0(-1, 0, 1)$.
3. а) $f(x, y, z) = \sin x^{yz}$, $M_0(\frac{\pi}{6}, 1, 2)$; б) $u = y^x$, $x = \ln t - 1$, $y = e^t$, $t_0 = 2$; в) $3x - 2y + z = xz + 5$, $M_0(2, 1, -1)$.
4. а) $f(x, y, z) = \ln x^3 + 2y^3 - z^3$, $M_0(2, 1, 0)$; б) $u = e^{y-2x+2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$; в) $e^z + x + 2y + z = 4$, $M_0(1, 1, 0)$.
5. а) $f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$, $M_0(1, 0, 1)$; б) $u = x^2 e^y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$, $M_0(1, 1, -1)$.
6. а) $f(x, y, z) = \ln \cos x^2 y^2 + z$, $M_0(0, 0, \frac{\pi}{4})$; б) $u = \ln e^x + e^y$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = 1$; в) $z^3 + 3xyz + 3y = 7$, $M_0(1, 1, 1)$.
7. а) $f(x, y, z) = 27\sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$, $M_0(3, 4, 2)$; б) $u = x^y$, $x = e^t$, $y = \ln t$, $t_0 = 1$; в) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$, $M_0(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.
8. а) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} xy^2 + z$, $M_0(2, 1, 0)$; б) $u = e^{y-2x}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$; в) $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$, $M_0(0, \frac{\pi}{2}, 1)$.
9. а) $f(x, y, z) = \arcsin(\frac{x^2}{y} - z)$, $M_0(2, 5, 0)$; б) $u = x^2 e^{-y}$, $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, $M_0(1, 2, 1)$.
10. а) $f(x, y, z) = \sqrt{z} \cdot \sin \frac{y}{x}$, $M_0(2, 0, 4)$; б) $u = \ln(e^{-x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$; в) $xy = z^2 - 1$, $M_0(0, 1, -1)$.
11. а) $f(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$, $M_0(-1, 1, 0)$; б) $u = e^{y-2x-1}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$; в) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$, $M_0(1, 1, 1)$.

12. a) $f(x, y, z) = \arctg \frac{xz}{y^2}$, $\bar{b}) u = \arcsin \frac{x}{y}, x = \sin t$, $\epsilon) x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$,
 $M_0(2, 1, 1)$; $y = \cos t, t_0 = \pi$; $M_0(0, 2, 1)$.
13. a) $f(x, y, z) = \ln \sin \left(x - 2y + \frac{z}{4} \right)$, $\bar{b}) u = \arccos \frac{2x}{y}, x = \sin t$, $\epsilon) x \cos y + y \cos z +$
 $M_0 \left(1, \frac{1}{2}, \pi \right)$; $y = \cos t, t_0 = \pi$; $+ z \cos x = 0, M_0 \left(0, \frac{\pi}{2}, \pi \right)$.
14. a) $f(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$, $\bar{b}) u = \frac{x^2}{y+1}, x = 1 - 2t$, $\epsilon) 3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$,
 $M_0(1, 1, 2)$; $y = \arctg t, t_0 = 0$; $M_0(2, 1, 2)$.
15. a) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}$, $\bar{b}) u = \frac{x}{y}, x = e^t$, $\epsilon) x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$,
 $M_0(1, 2, 2)$; $y = 2 - e^{2t}, t_0 = 0$; $M_0(1, 1, 1)$.
16. a) $f(x, y, z) = \ln x + y^2 - \sqrt{x^2 z^2}$, $\bar{b}) u = \ln e^{-x} + e^{-2y}$, $\epsilon) x + y + z + 2 = xyz$,
 $M_0(5, 2, 3)$; $x = t^2, y = \frac{1}{3}t^3, t_0 = 1$; $M_0(2, -1, -1)$.
17. a) $f(x, y, z) = \sqrt{z} x^y$, $\bar{b}) u = \sqrt{x + y^2 + 3}, x = \ln t$, $\epsilon) x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$,
 $M_0(1, 2, 4)$; $y = t^2, t_0 = 1$; $M_0(0, 1, -1)$.
18. a) $f(x, y, z) = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\bar{b}) u = \arcsin \frac{x^2}{y}, x = \sin t$, $\epsilon) e^z - xyz - x + 1 = 0$,
 $M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$; $y = \cos t, t_0 = \pi$; $M_0(2, 1, 0)$.
19. a) $f(x, y, z) = \ln x^3 + \sqrt[3]{y} - z$, $\bar{b}) u = \frac{y^2}{x}, x = 1 - 2t$, $\epsilon) x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$,
 $M_0(2, 1, 8)$; $y = 1 + \arctgt, t_0 = 0$; $M_0(1, -1, 2)$.
20. a) $f(x, y, z) = \frac{z}{x^4 + y^2}$, $\bar{b}) u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, x = \sin t$, $\epsilon) x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 -$
 $M_0(2, 3, 25)$; $y = \cos t, t_0 = \frac{\pi}{4}$; $-8z + 20 = 0, M_0(0, -2, 2)$.
21. a) $f(x, y, z) = 8\sqrt{x^3 + y^2 + z}$, $\bar{b}) u = \sqrt{x^2 + y + 3}, x = \ln t$, $\epsilon) x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$,
 $M_0(3, 2, 1)$; $y = t^2, t_0 = 1$; $M_0(1, 2, 0)$.
22. a) $f(x, y, z) = \ln \sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z$, $\bar{b}) u = \arcsin \frac{x}{2y}, x = \sin t$, $\epsilon) x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$,
 $M_0(1, 1, 1)$; $y = \cos t, t_0 = \pi$; $M_0(1, 2, 0)$.

23. a) $f(x, y, z) = -\frac{2x}{\sqrt{y^2 + z^2}},$ $M_0 \ 3, 0, 1;$	$\bar{b}) u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}, x = \sin 2t,$ $y = tg^2 t, t_0 = \frac{\pi}{4}.$	$\bar{e}) x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x -$ $-4y + 12 = 0, M_0 \ 0, 1, -1 .$
24. a) $f(x, y, z) = ze^{-\frac{x^2 + y^2}{2}},$ $M_0 \ 0, 0, 1;$	$\bar{b}) u = \sqrt{x + y + 3}, x = \ln t,$ $y = t^2, t_0 = 1;$	$\bar{e}) \sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3,$ $M_0 \ 4, 3, 1 .$
25. a) $f(x, y, z) = \frac{\sin(x - y)}{z},$ $M_0 \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{3} \right);$	$\bar{b}) u = \frac{y}{x}, x = e^t,$ $y = 1 - e^{2t}, t_0 = 0;$	$\bar{e}) x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59,$ $M_0(3, 1, 4).$
26. a) $f(x, y, z) = \sqrt{z} \ln \sqrt{x} + \sqrt{y},$ $M_0(4, 1, 4);$	$\bar{b}) u = \arcsin \frac{2x}{y}, x = \sin t,$ $y = \cos t, t_0 = \pi.$	$\bar{e}) x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz -$ $-2yz = 17, M_0(-2, -1, 2).$
27. a) $f(x, y, z) = \frac{xz}{x - y},$ $M_0(3, 1, 1);$	$\bar{b}) u = \ln(e^{2x} + e^y),$ $x = t^2, y = t^4, t_0 = 1;$	$\bar{e}) x^3 + 3xyz - z^3 = 27,$ $M_0(3, 1, 3).$
28. a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos z},$ $M_0 \left(3, 4, \frac{\pi}{2} \right);$	$\bar{b}) u = \arctg(x + y),$ $x = t^2 + 2, y = 4t^2, t_0 = 1;$	$\bar{e}) \ln z = x + 2y - z + \ln 3,$ $M_0(1, 1, 3).$
29. a) $f(x, y, z) = ze^{-xy},$ $M_0(0, 1, 1);$	$\bar{b}) u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3},$ $x = \ln t, y = t^3, t_0 = 1;$	$\bar{e}) 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz -$ $-z + 6 = 0, M_0(2, 1, 1).$
30. a) $f(x, y, z) = \arcsin x\sqrt{y} -$ $-yz^2, M_0(0, 4, 1);$	$\bar{b}) u = \arctg(xy),$ $x = t + 3, y = e^t, t_0 = 0;$	$\bar{e}) z^2 = xy - z + x^2 - 4,$ $M_0(2, 1, 1).$

Завдання 2 Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

1. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, \quad M_0(2, 1, -1).$
2. $S: x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy, \quad M_0(-2, 1, 2).$
3. $S: x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7, \quad M_0(1, 2, 1).$
4. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8, \quad M_0(-1, 1, 2).$
5. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13, \quad M_0(2, 1, -1).$
6. $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, \quad M_0(2, 1, -1).$

7. $S : x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46, \quad M_0(1, 2, -3).$
8. $S : x^2 + y^2 - xz - yz = 0, \quad M_0(0, 2, 2).$
9. $S : x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2, \quad M_0(1, 1, 1).$
10. $S : y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z, \quad M_0(1, 1, 1).$
11. $S : z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y, \quad M_0(-1, -1, -1).$
12. $S : z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y, \quad M_0(1, -1, 1).$
13. $S : z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y, \quad M_0(-1, 1, 1).$
14. $S : x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13, \quad M_0(3, 1, 2).$
15. $S : 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9, \quad M_0(1, -2, 1).$
16. $S : z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2, \quad M_0(2, 1, 0).$
17. $S : 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3, \quad M_0(1, 2, 1).$
18. $S : x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14, \quad M_0(3, 1, 4).$
19. $S : x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4, \quad M_0(1, 1, 2).$
20. $S : x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5, \quad M_0(-2, 1, 0).$
21. $S : x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11, \quad M_0(1, 4, -1).$
22. $S : x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8, \quad M_0(0, 2, 0).$
23. $S : x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0, \quad M_0(-1, -1, 1).$
24. $S : x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z, \quad M_0(1, 0, 1).$
25. $S : 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0, \quad M_0(1, -1, 1).$
26. $S : x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8, \quad M_0(1, 1, 0).$
27. $S : z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10, \quad M_0(-1, 1, 3).$
28. $S : z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15, \quad M_0(-1, 3, 4).$
29. $S : z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10, \quad M_0(-7, 1, 8).$
30. $S : z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, \quad M_0(1, -1, 2).$

Завдання 3 Перевірити, чи задовольняє вказаному рівнянню задана функція u .

$$1. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \frac{y}{x}.$$

$$2. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^3 - y^3, \quad u = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3.$$

$$3. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln x^2 + y + 1^2.$$

$$4. \quad y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = x^y.$$

$$5. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u = \frac{xy}{x+y}.$$

$$6. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^{xy}.$$

$$7. \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = \sin^2 x - ay.$$

$$8. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = y \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$9. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$10. \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = e^{-\cos(x+ay)}.$$

$$11. \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = (x-y)(y-z)(z-x).$$

$$12. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u, \quad u = x \ln \frac{y}{x}.$$

$$13. \quad y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \ln x^2 + y^2.$$

$$14. \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0, \quad u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy).$$

$$15. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy + u = 0, \quad u = e^{xy}.$$

$$16. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u = \arctg \frac{x+y}{1-xy}.$$

$$17. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln x^2 + y^2 + 2x + 1.$$

$$18. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \quad u = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}.$$

$$19. \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = 1, \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$20. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u = x^2 + y^2 \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

$$21. 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^{-(x+3y)} \sin(x+3y).$$

$$22. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = x e^{\frac{y}{x}}.$$

$$23. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$24. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$25. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u = \ln x + e^{-y}.$$

$$26. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = \arcsin \frac{x}{x+y}.$$

$$27. \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}, \quad u = \frac{y}{x^2 - y^2}.$$

$$28. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y}{x-y}, \quad u = \frac{x^2 + y^2}{x-y}.$$

$$29. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{u}, \quad u = \sqrt{2xy + y^2}.$$

$$30. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln x^2 - y^2.$$

Завдання 4 Дослідити на екстремум функцію.

$$1. z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

$$2. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

$$3. z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$
6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$
7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$
8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$
9. $z = 4x - y - x^2 - y^2.$
10. $z = 6x - y - 3x^2 - 3y^2.$
11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$
12. $z = x - 2x^2 + 2y^2 - 10.$
13. $z = x - 5x^2 + y^2 + 1.$
14. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$
15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$
16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$
17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$
18. $z = xy^2 - x - y.$
19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9.$
20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$
21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$
22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$
23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$
24. $z = xy^2 - x - y.$
25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$
26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
27. $z = x - 1x^2 + 2y^2.$
28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2.$
29. $z = x^2 + 3y + 2y^2.$
30. $z = 2x + y - x^2 - y^2.$

Завдання 5 Знайти найбільше та найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області $\bar{D}$, що обмежена заданими лініями.

1. $z = 3x + y - xy$, $\bar{D}: y = x, y = 4, x = 0$.
2. $z = xy - x - 2y$, $\bar{D}: x = 3, y = x, y = 0$.
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.
4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\bar{D}: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$.
6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $\bar{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.
8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.
9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $\bar{D}: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.
10. $z = x^2 + 2xy - 10$, $\bar{D}: y = 0, y = x^2 - 4$.
11. $z = xy - 2x - y$, $\bar{D}: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$.
12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $\bar{D}: y = 8, y = 2x^2$.
13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $\bar{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$, $\bar{D}: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, y = 0$.
15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $\bar{D}: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$.
16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $\bar{D}: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$.
17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $\bar{D}: y = 2x, y = 2, x = 0$.
18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$, $\bar{D}: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$.
19. $z = xy - 3x - 2y$, $\bar{D}: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$.
20. $z = x^2 + xy - 2$, $\bar{D}: y = 4x^2 - 4, y = 0$.
21. $z = x^2y - 4 - x - y$, $\bar{D}: x = 0, y = 0, y = 6 - x$.
22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $\bar{D}: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.
23. $z = 4x - y - x^2 - y^2$, $\bar{D}: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0$.

24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\bar{D}: x=3, y=0, y=x+1$.

25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $\bar{D}: x=0, x=1, y=0, y=2$.

26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$, $\bar{D}: y=x+2, y=0, x=2$.

27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $\bar{D}: y=0, y=\sqrt{1-x^2}$.

28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $\bar{D}: x=-1, x=1, y=-1, y=1$.

29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$, $\bar{D}: x+y+2=0, x=0, y=0$.

30. $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $\bar{D}: x=0, y=0, x+y=6$.

Завдання 6 Знайти невизначені інтеграли.

1. а) $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int x^2 \cos 2x dx$; г) $\int \frac{5x dx}{x^4+3x^2-4}$;

д) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$; е) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{8\sin^2 x-16\sin x \cos x}$; з) $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$.

2. а) $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$; в) $\int x \sin^2 x dx$; г) $\int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4} dx$;

д) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$; е) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{16\sin^2 x-8\sin x \cos x}$; з) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cos^3 x dx$.

3. а) $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$; в) $\int x \sin x \cos x dx$; г) $\int \frac{x^4+x^3+2x^2+x+2}{x^4+5x^2+4} dx$;

д) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$; е) $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x} dx$; ж) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; з) $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$.

4. а) $\int \frac{x dx}{2x^2+x+5}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int x^2(\sin 2x-3) dx$; г) $\int \frac{5 dx}{x^4+3x^2-4}$;

д) $\int \frac{x dx}{2+\sqrt{x+4}}$; е) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$; ж) $\int \frac{2\operatorname{tg} x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x} dx$; з) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$.

5. а) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int x^2(\sin x+1) dx$; г) $\int \frac{x^3+8x-2}{x^4+4x^2} dx$;

д) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$; е) $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$; ж) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$; з) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$.

6. а) $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; в) $\int x^2+x e^{-x} dx$; г) $\int \frac{2x^3-2x^2+5}{x-1} \frac{dx}{x^2+4}$;

- д) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx$; е) $\int \frac{dx}{3+2\cos x - \sin x}$; ж) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg}^2 x} dx$; з) $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x \cos^3 2x} dx$.
7. а) $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; в) $\int (x^2+x)e^x dx$; г) $\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x^4-x^2} dx$;
- д) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$; е) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$; з) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$.
8. а) $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$; в) $\int (x^2-x+1)e^{-x} dx$; г) $\int \frac{x^3-x-5}{x^4+3x^2-4} dx$;
- д) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} dx$; е) $\int \frac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$; з) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$.
9. а) $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; в) $\int (x^2-x+1)e^x dx$; г) $\int \frac{x^3-x-1}{x^4-x^2} dx$;
- д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; е) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; ж) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$; з) $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.
10. а) $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$; в) $\int x \operatorname{ctg}^2 x dx$; г) $\int \frac{2x^2-7x+10}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)} dx$;
- д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$; е) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$; ж) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$; з) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$.
11. а) $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$; в) $\int x^2 e^{-x} dx$; г) $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx$;
- д) $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx$; е) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; ж) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; з) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$.
12. а) $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$; в) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$; г) $\int \frac{x^3-x+2}{x^4+x^2} dx$;
- д) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$; е) $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x \cos x}$; з) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x \cos^3 x} dx$.
13. а) $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$; в) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; г) $\int \frac{x^2+2x+4}{x^4+5x^2+4} dx$;
- д) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-1}$; е) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$; ж) $\int \frac{\sin 2x}{4\sin^4 x + \cos^4 x} dx$; з) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x \sin^3 x} dx$.
14. а) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$; в) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$; г) $\int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^4} dx$; д) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$;
- е) $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$; з) $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x \sin^3 2x} dx$.

15.a) $\int \frac{x dx}{2x^2 + 2x + 5}$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$; в) $\int (x^2 + 2)e^{-x} dx$; г) $\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$;

д) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x-1}}$; е) $\int \frac{dx}{2 + 4\sin x + 3\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$; з) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$.

16.a) $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x - 1}}$; в) $\int x^2 \sin^2 x dx$; г) $\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} dx$;

д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$; е) $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$; ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3\cos^2 x}$; з) $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$.

17.a) $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$; в) $\int x^2 (\cos 2x + 3) dx$; г) $\int \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4 + 4x^2} dx$;

д) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx$; е) $\int \frac{2 - \sin x + 3\cos x}{1 + \cos x} dx$; ж) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$; з) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$.

18.a) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$; в) $\int (x^2 + 2)e^{-x} dx$; г) $\int \frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)} dx$;

д) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-7}}$; е) $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$; з) $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin^3 x dx$.

19.a) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}}$; в) $\int (x^3 + 3)\sin x dx$; г) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 2}{x^4 + 3x^2 - 4} dx$;

д) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-4}}$; е) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$; ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$; з) $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx$.

20.a) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + x - 1}}$; в) $\int (x^2 - 3)\cos x dx$; г) $\int \frac{4x^2 - 2}{x^4 - x^2} dx$;

д) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$; е) $\int \frac{7 + 6\sin x - 5\cos x}{1 + \cos x} dx$; ж) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x} dx$; з) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$.

21.a) $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - x - 1}}$; в) $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$; г) $\int \frac{2x^3 - 2x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx$;

д) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}$; е) $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 3}$; ж) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$; з) $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$.

22.a) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$; в) $\int (x^2 - 1)e^x dx$; г) $\int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)} dx$;

д) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+10}$; е) $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx$; ж) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}$; з) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$.

23.a) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x+6x+13}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$; в) $\int x^2 \cos^2 x dx$; г) $\int \frac{x^2 dx}{x^4+5x^2+4}$;
д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$; е) $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$; ж) $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}$; з) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

24.a) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$; в) $\int (x^2+x)\sin x dx$; г) $\int \frac{2-8x}{x^4+4x^2} dx$;
д) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$; е) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$; ж) $\int \frac{3\operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$; з) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$;

25.a) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$; в) $\int (x^2+x)\cos x dx$; г) $\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1} dx$;
д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$; е) $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{5+3\sin^2 x}$; з) $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$.

26.a) $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$; в) $\int x^2+1 e^x dx$; г) $\int \frac{2x^3+8x-3x^2-27}{x^4+13x^2+36} dx$;
д) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$; е) $\int \frac{dx}{3+5\sin x + 3\cos x}$; ж) $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x} dx$; з) $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

27.a) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$; в) $\int (x^2-1)e^{-x} dx$; г) $\int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9} dx$;
д) $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx$; е) $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$; ж) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$; з) $\int \sin^5 x \sqrt{\cos^3 x} dx$.

28.a) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$; в) $\int x \sin^2 x dx$; г) $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4} dx$;
д) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$; е) $\int \frac{dx}{4-4\sin x + 3\cos x}$; ж) $\int \frac{dx}{6-3\cos^2 x}$; з) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

29.a) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$; в) $\int \arcsin 9x dx$; г) $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4} dx$;
д) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$; е) $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$; ж) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$; з) $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$.

30.a) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$; в) $\int x \arctg 2x dx$; г) $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)} dx$;
д) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$; е) $\int \frac{dx}{2-3\cos x + \sin x}$; ж) $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x} dx$; з) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$.

Завдання 7 Обчислити визначені інтеграли з точністю до двох знаків після коми.

1. а) $\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx;$

б) $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx;$

в) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} dx.$

2. а) $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx;$

б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x};$

в) $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x (3 + e^{-x})}.$

3. а) $\int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)} dx;$

б) $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx;$

в) $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}.$

4. а) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)};$

б) $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx;$

в) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx.$

5. а) $\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y+2};$

б) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx;$

в) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}.$

6. а) $\int_2^3 \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx;$

б) $\int_0^{\pi/3} tg^2 x dx;$

в) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$

7. а) $\int_{1/3}^{1/2} \frac{x dx}{(x-1)^3};$

б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx;$

в) $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$

8. а) $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)};$

б) $\int_0^{\pi/4} 2 \cos x \sin 3x dx;$

в) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

9. а) $\int_3^4 \frac{dx}{(x+1)(x-2)};$

б) $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx;$

в) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}.$

10. а) $\int_0^1 \frac{(2x+3)dx}{(x-2)^3};$

б) $\int_0^{\pi/32} (32 \cos^2 4x - 16) dx;$

в) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$

11. а) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)};$

б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 1};$

в) $\int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{2+3x}}.$

12. а) $\int_3^5 \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)};$

б) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^4 \varphi d\varphi;$

в) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$

13. а) $\int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx;$

б) $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx;$

в) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x)^4}.$

14. а) $\int_{-1}^0 \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{(x-2)^2} dx;$

б) $\int_0^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x dx;$

в) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$

$$15.a) \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2};$$

$$б) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx;$$

$$B) \int_0^{\frac{1}{2} \ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$16.a) \int_8^{10} \frac{(x^2 + 3) dx}{x^3 - x^2 - 6x};$$

$$б) \int_{\pi/2}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x};$$

$$B) \int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{z^2 dz}{\sqrt{9 + z^3}}.$$

$$17.a) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2};$$

$$б) \int_{\pi/6}^{\pi/2} ctg^3 x dx;$$

$$B) \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1 + 3x}}.$$

$$18.a) \int_2^3 \frac{x^7 dx}{1 - x^4};$$

$$б) \int_0^{\pi/2} \cos x \cos 3x \cos 5x dx; \quad B) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$19.a) \int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1};$$

$$б) \int_0^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx;$$

$$B) \int_{\ln 3}^0 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx.$$

$$20.a) \int_{-1}^0 \frac{x dx}{x^3 - 1};$$

$$б) \int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx;$$

$$B) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos y dy}{4 + \sqrt{\sin y}}.$$

$$21.a) \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2 + 4}{x^3 - x^2 + x + 1} dx;$$

$$б) \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx;$$

$$B) \int_2^5 \frac{x^2 dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

$$22.a) \int_4^5 \frac{dx}{x^2(x-1)};$$

$$б) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + tg x}{\sin 2x} dx;$$

$$B) \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}}.$$

$$23.a) \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2 + 4)};$$

$$б) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx;$$

$$B) \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$24.a) \int_7^9 \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx;$$

$$б) \int_0^{\pi/8} \sin x \sin 3x dx;$$

$$B) \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

$$25.a) \int_4^6 \frac{x dx}{x^3 - 6x^2 + 16x - 6};$$

$$б) \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx; \quad B) \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x dx}{x(1 - \ln^2 x)}.$$

$$26.a) \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + 1};$$

$$б) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x};$$

$$B) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx.$$

$$27.a) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 1}{x^6 + x^4} dx;$$

$$б) \int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx;$$

$$B) \int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^{2/3}}.$$

$$28.a) \int_2^3 \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2 - 1)^2} dx;$$

$$б) \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x dx;$$

$$B) \int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx.$$

$$29.a) \int_3^5 \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx;$$

$$б) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x};$$

$$B) \int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}.$$

$$30. a) \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1};$$

$$б) \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx;$$

$$в) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

Завдання 8 Обчислити невластні інтеграли.

$$1. a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1};$$

$$б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$$

$$2. a) \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1};$$

$$б) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

$$3. a) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}};$$

$$б) \int_0^{1/3} \frac{e^{3+1/x}}{x^2} dx.$$

$$4. a) \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 + 1}};$$

$$б) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$$

$$5. a) \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}};$$

$$б) \int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

$$6. a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}};$$

$$б) \int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

$$7. a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16 + x^2)^5}};$$

$$б) \int_{1/2}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1-x) \ln^2(1-x)}.$$

$$8. a) \int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}};$$

$$б) \int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx.$$

$$9. a) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)};$$

$$б) \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}.$$

$$10. a) \int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$б) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx.$$

$$11. a) \int_0^{\infty} \frac{\arctg 2x}{\pi(1+4x^2)} dx;$$

$$б) \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$12. a) \int_{1/2}^{\infty} \frac{16 dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)};$$

$$б) \int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

$$13. a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5};$$

$$б) \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$$

- 14.a) $\int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}};$ б) $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx.$
- 15.a) $\int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx.$
- 16.a) $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\arctg 2x}}{1+4x^2} dx;$ б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}.$
- 17.a) $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)};$ б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$
- 18.a) $\int_0^{\infty} x \sin x dx;$ б) $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$
- 19.a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5};$ б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3} \ln 2}.$
- 20.a) $\int_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)\arctg^2 3x};$ б) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}.$
- 21.a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} \sqrt{\pi \arctg \frac{x}{2}};$ б) $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$
- 22.a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln^3 x};$ б) $\int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$
- 23.a) $\int_0^{\infty} e^{-3x} x dx;$ б) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$
- 24.a) $\int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx;$ б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$
- 25.a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1};$ б) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$
- 26.a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)};$ б) $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}.$
- 27.a) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2};$ б) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$
- 28.a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{6x^2-5x+1} \ln \frac{3}{4};$ б) $\int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{16-x^2}^3}.$

$$29.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2};$$

$$б) \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}.$$

$$30.a) \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2};$$

$$б) \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

Завдання 9 Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

$$1. \rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

$$2. y = x^2, y = 3 - x.$$

$$3. y = \sqrt{x}, y = x^3.$$

$$4. x = 7\cos^3 t, y = 7\sin^3 t.$$

$$5. \rho = 4\cos 3\varphi.$$

$$6. \rho = 3\cos 2\varphi.$$

$$7. \rho = 2(1 - \cos \varphi).$$

$$8. \rho^2 = 2\sin 2\varphi.$$

$$9. x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t).$$

$$10. \rho = 2(1 + \cos \varphi).$$

$$11. \rho = 2\sin 3\varphi.$$

$$12. \rho = 2 + \cos \varphi.$$

$$13. y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}.$$

$$14. y^2 = x+1, y^2 = 9-x.$$

$$15. y^2 = x^3, x=0, y=4.$$

$$16. \rho = 4\sin^2 \varphi, 0 \leq t \leq \pi, y=0.$$

$$17. x = 3\cos t, y = 2\sin t.$$

$$18. y^2 = 9x, y = 3x.$$

$$x = 3(\cos t + t \sin t),$$

$$19. y = 3(\sin t - t \cos t),$$

$$20. y^2 = 4x, x^2 = 4y.$$

$$21. y^2 = x^3, x=2.$$

$$(0 \leq t \leq \pi), y=0.$$

$$22. y = x^2, y = 2 - x^2.$$

$$23. y^2 = 4 - x^3, x=0.$$

$$24. \rho = 3\sin 4\varphi.$$

$$25. y = x^3, y=1, x=0.$$

$$26. xy = 6, x+y-7=0.$$

$$27. y = 2^x, y = 2x - x^2, x=0, x=2.$$

$$28. x^2 = 4y, y = 8/x^2 + 4.$$

$$29. y = x+1, y = \cos x, y=0.$$

$$30. x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t.$$

Завдання 10 Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури Φ навколо заданої осі координат.

$$1. \Phi: y^2 = 4 - x, x=0, Oy.$$

$$2. \Phi: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, x=0, y=0, Ox.$$

$$3. \Phi: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, Oy.$$

$$4. \Phi: y^3 = x^2, y=1, Ox.$$

$$5. \Phi: x = 6t - \sin t, y = 6(1 - \cos t), Ox.$$

$$6. \Phi: x = 3\cos^2 t, y = 4\sin^2 t, 0 \leq t \leq \pi/2, Oy.$$

$$7. \Phi: y^2 = x, x^2 = y, Ox.$$

$$8. \Phi: y^2 = (x-1)^3, x=2, Ox.$$

$$9. \Phi: x = \sqrt{1-y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}}x, y=0, Ox.$$

$$10. \Phi: y = \sin x, y=0, 0 \leq x \leq \pi, Ox.$$

$$11. \Phi: y^2 = 4x, x^2 = 4y, Ox.$$

$$12. \Phi: x = 2\cos t, y = 5\sin t, Oy.$$

13. $\Phi: y = x^2, 8x = y^2, Oy.$
14. $\Phi: y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1, Ox.$
15. $\Phi: y^2 = 4x/3, x = 3, Ox.$
16. $\Phi: y = 2x - x^2, y = 0, Ox.$
17. $\Phi: \rho = 2(1 + \cos \varphi),$ полярна вісь.
18. $\Phi: x = 7 \cos^3 t, y = 7 \sin^3 t, Oy.$
19. $\Phi: x^2/16 + y^2/1 = 1, Ox.$
20. $\Phi: x^3 = (y-1)^2, x = 0, y = 0, Ox.$
21. $\Phi: xy = 4, 2x + y - 6 = 0, Ox.$
22. $\Phi: x = \sqrt{3} \cos t, y = 2 \sin t, Oy.$
23. $\Phi: y = 2 - x^2, y = x^2, Ox.$
24. $\Phi: y = -x^2 + 8, y = x^2, Ox.$
25. $\Phi: y^2 = (x+4)^3, x = 0, Ox.$
26. $\Phi: y = x^3, x = 0, y = 8, Oy.$
27. $\Phi: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, Ox.$
28. $\Phi: 2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0, Ox.$
29. $\Phi: y = x - x^2, y = 0, Ox.$
30. $\Phi: y = 2 - x^2/2, x + y = 2, Oy.$

Завдання 11 Обчислити довжину дуги заданої лінії.

1. $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t.$
2. $x = 2 \cos t + t \sin t, y = 2 \sin t - t \cos t.$
3. $\rho = \sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right), \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$
4. $\rho = 2 \sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right), \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$
5. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}.$
6. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}.$
7. $y^2 = (x+1)^3,$ відсіченої прямою $x = 4.$
8. $y = 1 - \ln \cos x, \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right).$
9. $\rho = 6 \cos^3\left(\frac{\varphi}{3}\right), \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$
10. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t.$
11. $y^2 = (x-1)^3$ від точки $A(1;0)$ до $B(6;\sqrt{125}).$
12. $y^2 = x^5,$ відсіченої прямою $x = 5.$
13. $\rho = 3 \cos \varphi.$
14. $\rho = 3(1 - \cos \varphi).$
15. $\rho = 2 \cos^3 \varphi/3.$
16. $x = 5 \cos^2 t, y = 5 \sin^2 t, 0 \leq t \leq \pi/2.$
17. $9y^2 = 4(3 - x^3)$ між точками перетину з віссю $Oy.$
18. $\rho = 3 \sin \varphi.$
19. $y = \ln \sin x, \left(\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$
20. $x = 9(t - \sin t), y = 9(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi).$
21. $\rho = 2(1 - \cos \varphi).$
22. $y^2 = x - 1^3$ від точки $A(2;-1)$ до $B(5;-8).$
23. $x = 7(t - \sin t), y = 7(1 - \cos t), (2\pi \leq t \leq 4\pi).$
24. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, 0 \leq x \leq 2.$
25. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t.$
26. $x = \sqrt{3}t^2, y = t - t^3$ (петля).
27. $\rho = 5 \sin \varphi.$
28. $\rho = 4 \cos \varphi.$
29. $\rho = 5(1 + \cos \varphi).$
30. $y^2 = x^3$ від точки $A(0;0)$ до $B(4;8).$

Завдання 12 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої L навколо заданої осі.

1. $L: y = \frac{x^3}{3}, \quad (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}), \quad Ox.$
2. $L: \rho = 2 \cos \varphi, \text{ полярна вісь.}$
3. $L: x = 10 t - \sin t, y = 10 (1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), Ox.$
4. $L: y = \frac{x^2}{2}, \text{ відсічена прямою } y = \frac{3}{2}, Oy.$
5. $L: 3y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad Ox.$
6. $L: y = \sqrt{x}, \text{ відсічена прямою } y = x, \quad Ox.$
7. $L: x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi), Ox.$
8. $L: x = \cos t, y = 3 + \sin t, \quad Ox.$
9. $L: 3x = y^3, \quad (0 \leq y \leq 2), \quad Oy.$
10. $L: y = \frac{x^3}{3}, \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad Ox.$
11. $L: x = \cos t, y = 1 + \sin t, \quad Ox.$
12. $L: x^2 = 4 + y, \text{ відсічена прямою } y = 2, \quad Oy.$
13. $L: x = 3 t - \sin t, y = 3 (1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad Ox.$
14. $L: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, \quad Ox.$
15. $L: \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}, \text{ полярна вісь.}$
16. $L: y^2 = 4 + x, \text{ відсічена прямою } x = 2, \quad Ox.$
17. $L: y^2 = 2x, \text{ відсічена прямою } 2x = 3, \quad Ox.$
18. $L: 3y = x^3, \quad (0 \leq x \leq 1), \quad Ox.$
19. $L: \rho^2 = 4 \cos 2\varphi, \text{ полярна вісь.}$
20. $L: \rho = 6 \sin \varphi, \text{ полярна вісь.}$
21. $L: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad Ox.$
22. $L: \rho = 2 \sin \varphi, \text{ полярна вісь.}$
23. $L: \rho = \frac{2}{3} \cos \varphi, \text{ полярна вісь.}$
24. $L: x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t, \quad Ox.$
25. $L: x = 2 \cos t, y = 3 + 2 \sin t, \quad Ox.$
26. $L: \rho^2 = 9 \cos 2\varphi, \text{ полярна вісь.}$
27. $L: y = x^3 \text{ між прямими } x = \pm \frac{2}{3}, \quad Ox.$
28. $L: x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, \quad Ox.$
29. $L: x = \cos t, y = 2 + \sin t, \quad Ox.$
30. $L: \rho = 4 \sin \varphi, \text{ полярна вісь.}$

Завдання 13 Знайти координати центру мас однорідної плоскої кривої L .

1. L : півколо $x^2 + y^2 = R^2$, що розташоване над віссю Ox .
2. L : перша арка циклоїди $x = a t - \sin t, y = a (1 - \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$
3. L : дуга астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, розташована в третьому квадранті.
4. L : дуга кола радіусом R , що стягує центральний кут α .

5. L : дуга цепної лінії $y = \operatorname{arh}(x-a)$, $(-a \leq x \leq a)$.
6. L : дуга кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $(0 \leq \varphi \leq \pi)$.
7. L : дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{\varphi}$, $(\pi/2 \leq \varphi \leq \pi)$.
8. L : одна арка циклоїди $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$.
9. L : дуга астроїди $x = 2\cos^3(t/4)$, $y = 2\sin^3(t/4)$ у першому квадранті.
10. L : дуга кривої $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leq t = \pi/2$.
11. L : кардіоїда $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.
12. L : крива $\rho = 2\sin \varphi$ від $(0,0)$ до точки $\sqrt{2}, \pi/4$.
13. L : дуга кола $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $(0 \leq t \leq \pi)$.
14. L : крива $\rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi$, розташована між променями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$.
15. L : крива $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$, $0 \leq t \leq 1$.
16. Φ : трикутник, сторони якого лежать на прямій $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$.
17. Φ : обмежена еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ та вісями координат $(x \geq 0, y \geq 0)$.
18. Φ : обмежена першою аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ та віссю Ox .
19. Φ : обмежена кривими $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.
20. Φ : обмежена дугою синусоїди $y = \sin x$ та відрізком осі Ox $(0 \leq x \leq \pi)$.
21. Φ : обмежена півколом $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ та віссю Ox .
22. Φ : обмежена дугою параболи $y = b\sqrt{x/a}$, $(a > 0, b > 0)$, віссю Ox та прямою $x = b$.
23. Φ : обмежена дугою параболи $y = b\sqrt{x/a}$, $(a > 0, b > 0)$, віссю Oy та прямою $y = b$.
24. Φ : обмежена замкненою лінією $y^2 = ax^3 - x^4$.
25. Φ : обмежена осями координат та дугою астроїди, розташованої у першому квадранті.
26. Φ : сектор кола радіусом R з центральним кутом, який дорівнює 2α .
27. Φ : обмежена кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.
28. Φ : обмежена першою петлею лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
29. Φ : обмежена осями координат та параболою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.
30. Φ : обмежена напівкубічною параболою $ay^2 = x^3$ та прямою $x = a$ $a > 0$.

Завдання 14 Обчислити подвійні та потрійні інтеграли.

1. а) $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, D : $y = x^2$, $x = y^2$; б) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}} dy$;
 в) $\iiint_V (2x^2 + 3y + z) dx dy dz$, V : $2 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 4$;
 г) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, V : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
2. а) $\iint_D xy^2 dx dy$, D : $y = x^2$, $y = 2x$; б) $\int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$;
 в) $\iiint_V x^2 yz dx dy dz$, V : $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $2 \leq z \leq 3$;
 г) $\iiint_V y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, V : $z \geq 0$, $z = 2$, $y \geq \pm x$, $z^2 = 4 - x^2 - y^2$.
3. а) $\iint_D (x + y) dx dy$, D : $y^2 = x$, $y = x$; б) $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{-\sqrt{x^2 + y^2}} dy$;
 в) $\iiint_V (x + y + 4z^2) dx dy dz$, V : $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 1$;
 г) $\iiint_V z^2 dx dy dz$, V : $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$, $y \geq x$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.
4. а) $\iint_D x^2 y dx dy$, D : $y = 2 - x$, $y = x$, $x \geq 0$; б) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy$;
 в) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, V : $0 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$;
 г) $\iiint_V y dx dy dz$, V : $x^2 + y^2 + z^2 = 32$, $y^2 = x^2 + z^2$, $y \geq 0$.
5. а) $\iint_D (x^3 - 2y) dx dy$, D : $y = x^2 - 1$, $x \geq 0$, $y \leq 0$; б) $\int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx$;
 в) $\iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz$, V : $-1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, $-2 \leq z \leq 5$;
 г) $\iiint_V x dx dy dz$, V : $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $x^2 = y^2 + z^2$, $x \geq 0$.
6. а) $\iint_D (y - x) dx dy$, D : $y = x$, $y = x^2$; б) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy$;

В) $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz$, V : $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 0$, $1 \leq z \leq 2$;

Г) $\iiint_V y dx dy dz$, V : $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, $y \leq \sqrt{3x}$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7. а) $\iint_D (1+y) dx dy$, D : $y^2 = x$, $5y = x$; б) $\int_{-R}^0 \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2) dy$;

В) $\iiint_V (2x - y^2 - z) dx dy dz$, V : $1 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 0$;

Г) $\iiint_V y dx dy dz$, V : $z = \sqrt{8-x^2-y^2}$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $y \geq 0$.

8. а) $\iint_D (x+y) dx dy$, D : $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 + 1$; б) $\int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{tg}(x^2+y^2) dy$;

В) $\iiint_V 2xy^2z dx dy dz$, V : $0 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 0$, $1 \leq z \leq 2$;

Г) $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, V : $x \geq 0$, $z \geq 0$, $y \geq \sqrt{3x}$, $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$.

9. а) $\iint_D x(y-1) dx dy$, D : $y = 5x$, $y = x$, $x = 3$; б) $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2) dy$;

В) $\iiint_V 5xyz^2 dx dy dz$, V : $-1 \leq x \leq 0$, $2 \leq y \leq 3$, $1 \leq z \leq 2$;

Г) $\iiint_V \frac{y^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, V : $y \geq 0$, $y \leq \sqrt{3x}$, $z = 3(x^2+y^2)$, $z = 3$.

10. а) $\iint_D (x-2)y dx dy$, D : $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$; б) $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin \sqrt{x^2+y^2} dy$;

В) $\iiint_V (x^2 + 2y^2 - z) dx dy dz$, V : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$, $-1 \leq z \leq 2$;

Г) $\iiint_V \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2}}$, V : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, $z \geq 0$.

11. а) $\iint_D (x-y^2) dx dy$, D : $y = x^2$, $y = 1$; б) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy$;

В) $\iiint_V (x+2yz) dx dy dz$, V : $-2 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$;

- $\Gamma) \iiint_V \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, V: z = 2(x^2 + y^2), y \geq 0, y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x, z = 18.$
12. а) $\iint_D x^2 y dx dy, D: y = 2x^2, y = 0, x = 1;$ б) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1 + x^2 + y^2) dy;$
 Б) $\iiint_V (x + yz^2) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 3;$
 $\Gamma) \iiint_V \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, V: z = 2 - x^2 - y^2, y \geq 0, y \leq x, z = 4.$
13. а) $\iint_D x^2 + y^2 dx dy, D: x = y^2, x = 1;$ б) $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1 + x^2 + y^2};$
 Б) $\iiint_V xy - z^2 dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2;$
 $\Gamma) \iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, V: x^2 + y^2 = 4y, y + z = 4, z \geq 0.$
14. а) $\iint_D xy dx dy, D: y = x^3, y = 0, x \leq 2;$ б) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}};$
 Б) $\iiint_V (xy - z^2) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 3;$
 $\Gamma) \iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, V: x^2 + y^2 = 2x, x + z = 2, y \geq 0, z \geq 0.$
15. а) $\iint_D (x + y) dx dy, D: y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3;$ б) $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy;$
 Б) $\iiint_V (x^3 + yz) dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1;$
 $\Gamma) \iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, V: x^2 + y^2 = 16y, y + z = 16, x \geq 0, z \geq 0.$
16. а) $\iint_D x(x + y) dx dy, D: y = 1 - x^2, y \geq 0;$ б) $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cos^2 \sqrt{x^2 + y^2}};$
 Б) $\iiint_V (x^3 + y^2 - z) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1;$
 $\Gamma) \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, V: x^2 + y^2 = 2x, x + y + z = 2, z \geq 0.$

17. а) $\iint_D y(1-x)dx dy, D: y^3 = x, y = x;$ б) $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \sin^2 \sqrt{x^2+y^2}};$

В) $\iiint_V (2x^2 + y - z^3)dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2;$

Г) $\iiint_V xy dx dy dz, V: 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, z^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

18. а) $\iint_D xy^3 dx dy, D: y^2 = 1-x, x \geq 0;$ б) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy;$

В) $\iiint_V x^2 y z^2 dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0;$

Г) $\iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}, V: x^2 + y^2 = 2y, x^2 + y^2 = 4y, x \geq 0, z \geq 0, z = 6.$

19. а) $\iint_D x(y+5)dx dy, D: y = x+5, x+y+5=0, x \leq 0;$ б) $\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{ctg} \sqrt{x^2+y^2}};$

В) $\iiint_V (x+y-z)dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 5;$

Г) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz, V: x^2 + y^2 + z^2 = 36, y \geq 0, z \geq 0, y \leq -x.$

20. а) $\iint_D (x-y)dx dy, D: y = x^2-1, y = 3;$ б) $\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2} dy;$

В) $\iiint_V x + 2y + 3z^2 dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2;$

Г) $\iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}, V: x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, z \geq 0, z = 4, y \geq 0, y \leq x.$

21. а) $\iint_D (x+1)y^2 dx dy, D: y = 3x^2, y = 3;$ б) $\int_{-R}^0 dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \cos(x^2+y^2) dy;$

В) $\iiint_V (3x^2 + 2y + z)dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 3;$

Г) $\iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq 0, y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x, z \geq 0.$

22. а) $\iint_D xy^2 dx dy, D: y = 3x^2, y = 2;$ б) $\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2) dy;$

В) $\iiint_V (xy - z^3)dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3;$

$$\Gamma) \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, V: x^2 - 2x + y^2 = 0, y \geq 0, x + z = 2, z \geq 0.$$

$$23. \text{ a) } \iint_D (x^3 + y) dx dy, D: x + y = 1, x + y = 2, x \leq 1, x \geq 0; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy;$$

$$\text{B) } \iiint_V x^3 y z dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1;$$

$$\Gamma) \iiint_V x^2 dx dy dz, V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \geq 0, y \leq x, z \geq 0.$$

$$24. \text{ a) } \iint_D xy^3 dx dy, D: y = x^3, y \geq 0, y = 4x; \quad \text{б) } \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} e^{x^2+y^2} dy;$$

$$\text{B) } \iiint_V xy^2 dx dy dz, V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3;$$

$$\Gamma) \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, V: x^2 + y^2 = 4y, y + z = 4, z \geq 0.$$

$$25. \text{ a) } \iint_D x^3 + 3y dx dy, D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0; \quad \text{б) } \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln 1 + x^2 + y^2 dy;$$

$$\text{B) } \iiint_V xyz^2 dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 4;$$

$$\Gamma) \iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \leq \sqrt{3}x, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$26. \text{ a) } \iint_D xy dx dy, D: y = \sqrt{x}, y = 0, x + y = 2; \quad \text{б) } \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-x^2+y^2} dy;$$

$$\text{B) } \iiint_V (x + yz) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2;$$

$$\Gamma) \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, V: x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0, z \geq 0, z = 3.$$

$$27. \text{ a) } \iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy, D: y = x, xy = 1, y = 2; \quad \text{б) } \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln 1 + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy;$$

$$\text{B) } \iiint_V x + y^2 - z^2 dx dy dz, V: -2 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 5;$$

$$\Gamma) \iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0.$$

28. а) $\iint_D y \sqrt{1+x^2} \, dx dy, D: y = x^3, y = 3x;$ б) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2+y^2} \, dy;$
- в) $\iiint_V x + y + z^2 \, dx dy dz, V: -1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 3;$
- г) $\iiint_V x dx dy dz, V: x^2 = 2 - y^2 + z^2, x = 4, x \geq 0.$
29. а) $\iint_D y \sqrt{1+2x} \, dx dy, D: x = 2 - y^2, x = 0;$ б) $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin \sqrt{x^2+y^2} \, dy;$
- в) $\iiint_V x + y^2 - 2z \, dx dy dz, V: 1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1;$
- г) $\iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, V: 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0.$
30. а) $\iint_D e^y dx dy, D: y = \ln x, y = 0, x = 2;$ б) $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy;$
- в) $\iiint_V x - y - z \, dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 1;$
- г) $\iiint_V x dx dy dz, V: z = \sqrt{18-x^2-y^2}, z = \sqrt{x^2+y^2}, x \geq 0.$

Завдання 15 Обчислити площу плоскої області D , обмеженої заданими лініями.

Зробити рисунок.

- а) $D: y^2 = 4x, x + y = 3, y \geq 0;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2, 4x^2 + y^2 = a^2.$
- а) $D: y = 6x^2, y + x = 2, x \geq 0;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2, x^2 y^2 = a^2.$
- а) $D: y^2 = x + 2, x = 2;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2, 4x^2 + 3y^2 = a^2.$
- а) $D: x = -2y^2, x = 1 - 3y^2, y \geq 0, x \leq 0;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2, 3x^2 + 2y^2 = a^2.$
- а) $D: y = \frac{8}{x^2+4}, x^2 = 4y;$ б) $D: x^4 - y^4 = x^2 + y^2.$
- а) $D: y = x^2 + 1, x + y = 3;$ б) $D: \rho = a \sin^2 2\varphi.$
- а) $D: y^2 = 4x, x^2 = 4y;$ б) $D: \rho = a \sin^2 \varphi.$
- а) $D: y = \cos x, y \leq x + 1, y \geq 0;$ б) $D: \rho = a(1 - \cos \varphi).$

9. a) $D: x = \sqrt{4-y^2}, y = \sqrt{3x}, x \geq 0;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2 - 2x^2 + 3y^2.$
10. a) $D: y = x^2 + 2, y \geq 0, x = 2, y = x;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2 - 5x^2 + 3y^2.$
11. a) $D: y = 4x^2, 9y = x^2, y \leq 2;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2 - 7x^2 + 5y^2.$
12. a) $D: y = x^2, y = -x;$ б) $D: x^2 + y^2 = 2a^2xy.$
13. a) $D: x = y^2, x = \frac{3}{4}y^2 + 1;$ б) $D: x^2 + y^2 = 4x^2y^2.$
14. a) $D: y = \sqrt{2-x^2}, y = x^2;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^4y^2.$
15. a) $D: y = x^2 + 4x, y = x + 4;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^4x^2.$
16. a) $D: 2y = \sqrt{x}, x + y = 5, x \geq 0;$ б) $D: \rho = a \cos^2 \varphi.$
17. a) $D: y = 2^x, y = 2x - x^2, x = 2, x = 0;$ б) $D: \rho^2 = a^2(1 + \sin^2 \varphi).$
18. a) $D: y = -2x^2 + 2, y \geq -6;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2x^4.$
19. a) $D: y^2 = 4x, x = \frac{8}{y^2 + 4};$ б) $D: x^2 + y^2 = 4 - 3x^2 + 4y^2.$
20. a) $D: y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2x^2y^2.$
21. a) $D: x = y^2 + 1, y + x = 3;$ б) $D: x^2 + y^2 = a^2 - x^4 + y^4.$
22. a) $D: x^2 = 3y, y^2 = 3x;$ б) $D: x^2 + y^2 = 4a^2xy - x^2 - y^2.$
23. a) $D: x = \cos y, x \leq y + 1, x \geq 0;$ б) $D: x^2 + y^2 = 2ay^3.$
24. a) $D: x = 4 - y^2, x - y + 2 = 0;$ б) $D: \rho = a \sin 2\varphi.$
25. a) $D: x = y^2, x = \sqrt{2 - y^2};$ б) $D: \rho = a \cos 5\varphi.$
26. a) $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1, y \leq \frac{1}{2}x, y \geq 0;$ б) $D: \rho = 4(1 + \cos \varphi).$
27. a) $D: y^2 = 4 - x, y = x + 2, y = 2, y = -2;$ б) $D: \rho = 2a(2 + \cos \varphi).$
28. a) $D: y = x^2, y = \frac{3}{4}x^2 + 1;$ б) $D: \rho^2 = a^2 \cos 3\varphi.$
29. a) $D: x = y^2, y^2 = 4 - x;$ б) $D: \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$
30. a) $D: xy = 1, x^2 = y, y = 2, x = 0;$ б) $D: \rho = a \sin 3\varphi.$

Завдання 16 За допомогою а) подвійного, б) потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити рисунок.

1. а) $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $z^2 = 4 - x$, $x^2 + y^2 = 4x$.
2. а) $z = 2 - (x^2 + y^2)$, $x + 2y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $z = 4 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \geq 0$.
3. а) $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y - 7 = 0$, $z \geq 0$; б) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2 - x - y$, $z \geq 0$.
4. а) $z = 2x^2 + 3y^2$, $y = x^2$, $y = x$, $z \geq 0$; б) $z = y^2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y = 2$.
5. а) $z = 2x^2 + y^2$, $y \leq x$, $y = 3x$, $x = 2$, $z \geq 0$;
б) $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = x$, $x = \sqrt{9 - y^2}$, $x = \sqrt{25 - y^2}$.
6. а) $z = x$, $y = 4$, $x = \sqrt{25 - y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - x - y$, $z \geq 0$.
7. а) $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $x + y + z = 2$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y = 7$.
8. а) $y = 1 - x^2$, $x + y + z = 3$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $x \geq 0$, $z \geq 0$, $z = y$, $x = 4$, $y = \sqrt{25 - x^2}$.
9. а) $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $z = 4 - x$, $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$.
10. а) $z = 4 - x^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;
б) $y \geq 0$, $z \geq 0$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$, $z = x^2$.
11. а) $2x + 3y - 12 = 0$, $2z = y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x = 4$, $y = 2x$, $z = x^2$.
12. а) $z = 10 + x^2 + 2y^2$, $y = x$, $x = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $x \geq 0$, $z \geq 0$, $y = 2x$, $y = 3$, $z = \sqrt{y}$.
13. а) $z = x^2$, $x + y = 6$, $y = 2x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x = 3$, $y = 2x$, $z = y^2$.
14. а) $z = 3x^2 + 2y + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = 1$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $y^2 = 2 - x$, $z = 3x$.
15. а) $3y = \sqrt{x}$, $y \leq x$, $x + y + z = 10$, $y = 1$, $z = 0$; б) $z \geq 0$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$.
16. а) $y^2 = 1 - x$, $x + y + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$; б) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$.
17. а) $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 3x + 2y + 6$, $z = 0$; б) $z \geq 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5 - x - y$.
18. а) $z^2 = 1 - y$, $x + y + z = 3$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $z = x$, $x = \sqrt{4 - y^2}$.
19. а) $x = y^2$, $x = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$; б) $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y = 2$, $z = x^2$.
20. а) $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;
б) $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y = 4$, $z = x$, $x = \sqrt{25 - y^2}$.
21. а) $y = x^2$, $y = 4$, $z = 2x + 5y + 10$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = y^2$.
22. а) $y = 2x$, $x + y + z = 2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$; б) $x \geq 0$, $z \geq 0$, $y \geq x$, $z = 1 - x^2 - y^2$.

23. а) $y=1-z^2$, $y=x$, $y=-x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $x^2+y^2=4$, $z=x^2+y^2$.
24. а) $x^2+y^2=4y$, $z^2=4-y$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $y=2$, $y=x$, $z=x^2$.
25. а) $x^2+y^2=1$, $z=2-x^2-y^2$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $y+z=2$, $x^2+y^2=4$.
26. а) $y=x^2$, $z=0$, $y+z=2$; б) $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x-y=0$, $2x+y=2$, $4z=y^2$.
27. а) $z^2=4-x$, $x^2+y^2=4x$, $z \geq 0$; б) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $2x+y=2$, $z=y^2$.
28. а) $z=x^2+2y^2$, $y=x$, $x \geq 0$, $y=1$, $z \geq 0$; б) $z \geq 0$, $x=y^2$, $x=2y^2+1$, $z=1-y^2$.
29. а) $z=y^2$, $x+y=1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$; б) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y=3-x$, $z=9-x^2$.
30. а) $y^2=x$, $x=3$, $z=x$, $z \geq 0$; б) $x \geq 0$, $z \geq 0$, $x+y=4$, $z=4\sqrt{y}$.

Завдання 17 Обчислити: а) масу неоднорідної пластини D з поверхневою щільністю $M(x, y)$; б) статичні моменти однорідної пластини D відносно координатних вісей, обмежених заданими лініями.

- а) $D: y^2=x$, $x=3$, $M=x$; б) $D: x^2+y^2-2ay=0$, $x-y \leq 0$, Ox .
- а) $D: x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $M=x^2$; б) $D: x^2+y^2-2ax=0$, $x+y \leq 0$, Oy .
- а) $D: x=0$, $y=0$, $2x+3y=6$, $M=\frac{y^2}{2}$; б) $D: x^2+y^2+2ay=0$, $x-y \geq 0$, Ox .
- а) $D: x^2+y^2=4x$, $M=4-x$; б) $D: x^2+y^2+2ax=0$, $x+y \geq 0$, Ox .
- а) $D: x=0$, $y=1$, $y=x$, $M=x^2+2y^2$;
б) $D: x^2+y^2+2ax \geq 0$, $x^2+y^2+2ay \leq 0$, $x \leq 0$, Ox .
- а) $D: x^2+y^2=1$, $M=2-x-y$; б) $D: x^2+y^2-2ay \geq 0$, $x^2+y^2+2ax \leq 0$, $y \geq 0$, Oy .
- а) $D: x^2+y^2=4y$, $M=\sqrt{4-y}$; б) $D: x^2+y^2-2ay \leq 0$, $x^2+y^2-2ax \geq 0$, $x \geq 0$, Ox .
- а) $D: y=x$, $y=-x$, $y=1$, $M=\sqrt{1-y}$;
б) $D: x^2+y^2-2ax \leq 0$, $x^2+y^2+2ay \geq 0$, $y \leq 0$, Oy .
- а) $D: x=0$, $y=2x$, $x+y=2$, $M=2-x-y$;
б) $D: x^2+y^2-2ax \geq 0$, $x^2+y^2+2ay \leq 0$, $x \geq 0$, Ox .
- а) $D: x=1$, $x=y^2$, $M=4-x-y$; б) $D: x^2+y^2+2ax \leq 0$, $x^2+y^2+2ay \geq 0$, $y \leq 0$, Oy .
- а) $D: y=0$, $x^2=1-y$, $M=3-x-y$;
б) $D: x^2+y^2-2ay \leq 0$, $x^2+y^2+2ax \geq 0$, $x \leq 0$, Ox .

12. a) $D: y = x^2, x = y^2, M = 3x + 2y + 6$;
 б) $D: x^2 + y^2 - 2ay \geq 0, x^2 + y^2 - 2ax \leq 0, y \geq 0, Oy$.
13. a) $D: y = x^2, y = 4, M = 2x + 5y + 10$;
 б) $D: x^2 + y^2 + 2ay = 0, x^2 + y^2 + ay = 0, x \leq 0, Ox$.
14. a) $D: x = 0, y = 0, x + y = 1, M = 2x^2 + y^2$;
 б) $D: x^2 + y^2 - 2ax = 0, x^2 + y^2 - ax = 0, y \geq 0, Oy$.
15. a) $D: x = 0, y^2 = 1 - x, M = 2 - x - y$;
 б) $D: x^2 + y^2 + 2ay = 0, x^2 + y^2 + ay = 0, x \geq 0, Ox$.
16. a) $D: y = \sqrt{x}, y = x, M = 2 - x - y$; б) $D: x^2 + y^2 - 2ay = 0, x^2 + y^2 - ay = 0, x \geq 0, Ox$.
17. a) $D: y = x^2 - 1, y = 1, M = 3x^2 + 2y^2 + 1$;
 б) $D: x^2 + y^2 - 2ay = 0, x^2 + y^2 - ay = 0, x \leq 0, Ox$.
18. a) $D: x = 1, y = 0, y = x, M = x^2 + 2y^2 + 10$;
 б) $D: x^2 + y^2 + 2ax = 0, x^2 + y^2 + ax = 0, y \geq 0, Oy$.
19. a) $D: y = 0, y = 2x, x + y = 6, M = x^2$;
 б) $D: x^2 + y^2 - 2ax = 0, x^2 + y^2 - ax = 0, y \leq 0, Ox$.
20. a) $D: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 4, M = 4 - x^2$;
 б) $D: x^2 + y^2 + 2ax = 0, x^2 + y^2 + ax = 0, y \leq 0, Oy$.
21. a) $D: y = x^2, y = 2, M = 2 - y$; б) $D: x^2 + y^2 + 2ay = 0, x + y \leq 0, x \geq 0, Ox$.
22. a) $D: x = 0, y = 0, x + y = 1, M = x^2 + y^2$; б) $D: x^2 + y^2 - 2ay = 0, y - x \geq 0, x \geq 0, Ox$.
23. a) $D: y = x^2 + 1, x + y = 3, M = 4x + 5y + 2$;
 б) $D: y^2 + x^2 + 2ax = 0, y - x \geq 0, y \leq 0, Oy$.
24. a) $D: y = x^2 - 1, x + y = 1, M = 2x + 5y + 8$;
 б) $D: x^2 + y^2 - 2ay = 0, x + y \geq 0, x \leq 0, Ox$.
25. a) $D: x = 0, y = 0, y = 4, x = \sqrt{25 - y^2}, M = x$;
 б) $D: x^2 + y^2 + 2ax = 0, x + y \leq 0, y \geq 0, Oy$.
26. a) $D: x = 2, y = x, y = 3x, M = 2x^2 + y^2$; б) $D: x^2 + y^2 - 2ax = 0, y - x \leq 0, y \geq 0, Ox$.
27. a) $D: y = x, y = x^2, M = 2x + 3y$; б) $D: x^2 + y^2 - 2ax = 0, y - x \leq 0, x + y \geq 0, Oy$.
28. a) $D: x = 0, x + 2y + 2 = 0, x + y = 1, M = x^2$;

- б) $D: x^2 + y^2 - 2ay = 0, y - x \geq 0, x + y \geq 0, Ox$.
29. а) $D: x = 0, y = 0, x + 2y = 1, M = 2 - (x^2 + y^2)$;
 б) $D: x^2 + y^2 + 2ax = 0, x + y \leq 0, y - x \geq 0, Oy$.
30. а) $D: x = 0, y = 0, x + y = 2, M = x^2 + y^2$; б) $D: x^2 + y^2 + 2ay, y - x \leq 0, x + y \leq 0, Ox$.

Завдання 18 Обчислити: а) координати центра мас; б) момент інерції відносно вісей координат однорідних тіл V , обмежених заданими поверхнями.

1. а) $V: x = b, y^2 + z^2 = 3, x = 0$; б) $V: y^2 = x^2 + z^2, y = 4, Oy$.
2. а) $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 36, y = 0$; б) $V: x = y^2 + z^2, x = 2, Ox$.
3. а) $V: x = 7(y^2 + z^2), x = 28$; б) $V: y^2 = x^2 + z^2, y = 2, Oy$.
4. а) $V: z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8$; б) $V: x = y^2 + z^2, x = 9, Ox$.
5. а) $V: z = 5(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2, z = 0$; б) $V: x^2 = y^2 + z^2, x = 2, Ox$.
6. а) $V: x = 6\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 9, x = 0$; б) $V: y = x^2 + z^2, y = 2, Oy$.
7. а) $V: z = 8(x^2 + y^2), z = 32$; б) $V: x^2 = y^2 + z^2, x = 3, Ox$.
8. а) $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, y = 9$; б) $V: x = y^2 + z^2, x = 3, Ox$.
9. а) $V: 9y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 4, y = 0$; б) $V: z = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 2, Oy$.
10. а) $V: 3z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4, z = 0$; б) $V: y = x^2 + z^2, y = 3, Oy$.
11. а) $V: x^2 + z^2 = 6y, y = 8$; б) $V: x^2 = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 1, x = 0, Ox$.
12. а) $V: 8x = \sqrt{y^2 + z^2}, x = \frac{1}{2}$; б) $V: x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 1, x = 0, Ox$.
13. а) $V: 2x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0$; б) $V: z^2 = x^2 + y^2, z = 3, Oz$.
14. а) $V: 4y = \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0$; б) $V: z = x^2 + y^2, z = 3, Oz$.
15. а) $V: y^2 + z^2 = 8x, x = 2$; б) $V: y^2 = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 4, y = 0, Oy$.
16. а) $V: z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 36$; б) $V: 2y = x^2 + z^2, y = 2, Oy$.
17. а) $V: z = 3x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 9, z = 0$; б) $V: x^2 = y^2 + z^2, x = 2, Ox$.
18. а) $V: z = 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 4, x = 0$; б) $V: 2z = x^2 + y^2, z = 2, Oz$.
19. а) $V: x^2 + z^2 = 4y, y = 9$; б) $V: x^2 = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0, Ox$.

20. а) $V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2}, x = 20$; б) $V: 2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0, Oz$.
21. а) $V: y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 10, y = 0$. б) $V: z = 2 - x^2 - y^2, z = 2, Oz$.
22. а) $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 - z^2 = 16, y = 0$; б) $V: x = 1 - y^2 - z^2, x = 0, Ox$.
23. а) $V: y^2 + z^2 = 3x, x = 9$; б) $V: y = 4 - x^2 - z^2, y = 0, Oy$.
24. а) $V: y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 4$; б) $V: x = 3 - y^2 - z^2, x = 3, Ox$.
25. а) $V: x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0$; б) $V: z = 9 - x^2 - y^2, z = 0, Oz$.
26. а) $V: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 3$; б) $V: z = 4\sqrt{x^2 + y^2}, z = 2, Oz$.
27. а) $V: z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 9, z = 0$; б) $V: z = 3 - x^2 - y^2, z = 3, Oz$.
28. а) $V: x^2 + y^2 = 2z, z = 3$; б) $V: x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, x = 2, Ox$.
29. а) $V: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4$; б) $V: y = 3 - x^2 - y^2, y = 3, Oy$.
30. а) $V: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$; б) $V: z = 3 - x^2 - y^2, z = 0, Oz$.

Завдання 19 Обчислити криволінійні інтеграли.

1. а) $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L_{AB} – дуга $y = x^2$ між точками $A(-1; 1)$ та $B(1; 1)$;
- б) $\int_L \sqrt{2 - z^2} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, де L – дуга кривої $\underbrace{x = t \cos t, y = t \sin t, z = t}_{0 \leq t \leq 2\pi}$;
- в) $\oint \sqrt{2y^2 + z^2} dl$, де L – коло $\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x = y}$;
- г) $\int_{L_{OA}} (xy - y^2)dx + xdy$, де L_{OA} – дуга $y = 2x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.
2. а) $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$;
- б) $\int_L xyz dl$, де L – чверть кола $\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}}_{\text{розміщена в першому октанті}}$;
- в) $\oint (x^2 + y^2) dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4$;

г) $\int_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz$, де L_{OBA} – ламана OBA : $O(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $A(0;2;1)$.

3. а) $\int_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, де L_{OB} – відрізок прямої, яка з'єднує точки $O(0;0)$ та $B(2;2)$;

б) $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = x^3$ від точки $O(0;0)$ до $A(1;1)$;

в) $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$, де L – частина дуги спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, розташована всередині круга радіусом R з центром у полюсі;

г) $\int_L \frac{x}{y} dx + \frac{1}{y-a} dy$, де L – дуга циклоїди $\underbrace{x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)}$, де $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

4. а) $\oint_L (x+2y)dx + (x-y)dy$, де L – коло $\underbrace{x = 2\cos t, y = 2\sin t}$ в додатному напрямку обігу;

б) $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})dl$, де L_{AB} – відрізок прямої AB : $A(-1;0)$, $B(0;1)$;

в) $\int_L yzxdx + z\sqrt{R^2 - y^2}dy + xydz$, де L – дуга кривої $\underbrace{x = R\cos t, y = R\sin t, z = \frac{at}{2\pi}}$, де

параметр t пробігає від точки перетину кривої з площиною $z = 0$ до точки перетину з площиною $z = a$.

г) $\int_L (x^2 + y^2 + z^2)dl$, де L – дуга кривої $\underbrace{x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt}$, де $0 \leq t \leq 2\pi$.

5. а) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5(x-y)}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, яка з'єднує точки $A(-1;0)$ та $B(0;1)$;

б) $\int_{L_{OA}} 2xzydy - y^2dz$, де L_{OA} – дуга параболи $z = \frac{x^2}{4}$, від точки $O(0;0;0)$ до точки $A(2;0;1)$;

в) $\oint_L (x^2y - x)dx + (y^2x - 2y)dy$, де L – дуга еліпса $\underbrace{x = \cos t, y = 2\sin t}$, від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$;

г) $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dl$, де L – перший виток кінчної гвинтової лінії $\underbrace{x = t\cos t, y = t\sin t, z = t}$.

6. а) $\oint_{L_{AB}} (xy - 1)dx - x^2 y dy$, де L – дуга еліпса $\underbrace{x = \cos t, y = 2 \sin t}$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$;

б) $\int_{L_{AB}} \left(x - \frac{1}{y} \right) dl$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$, від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$;

в) $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, де L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

г) $\int_L (x + z) dl$, де L – дуга кривої $\underbrace{x = t, y = \frac{3}{\sqrt{2}} t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1}$.

7. а) $\int_{L_{AB}} y dl$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;1)$;

б) $\int_L x \sqrt{x^2 - y^2} dl$, де L – крива $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$;

в) $\int_{L_{AB}} \cos x dx - \sin x dz$, де L_{AB} – відрізок прямої AB : $A(2;0;-2), B(-2;0;2)$;

г) $\int_{L_{OBA}} 2xy dx - x^2 dy$, де L_{OBA} – ламана OBA : $O(0;0), B(2;0), A(2;1)$.

8. а) $\int_{L_{OB}} y dl$, де L_{OB} – дуга параболи $y^2 = \frac{2}{3}x$ між точками $O(0;0)$ та $B\left(\frac{35}{6}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$;

б) $\int_L y dx - x dy$, де L – чверть дуги кола $\underbrace{x = R \cos t, y = R \sin t}$, розміщена в I квадранті з

додатнім напрямком параметру;

в) $\int_L (x + y) dl$, де L – перший виток лемніскати $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$;

г) $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2) dx + xy dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB : $A(1;1), B(3;4)$.

9. а) $\int_{L_{OA}} (xy - x) dx + \frac{x^2}{y} dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ між точками $O(0;0)$ та $A(1;2)$;

б) $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, де L – дуга кривої $\underbrace{x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3} \cdot t, 0 \leq t \leq 2\pi}$;

в) $\int_L xy dl$, де L – перша чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

г) $\int_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB : $A(2\pi, -2\pi), B(-2\pi, 2\pi)$.

10.а) $\int_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB : $A(1,2)$, $B(3,6)$;

б) $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$, де L – дуга кардіоїди $\rho = (1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

в) $\int_L (x+y) dl$, де L – чверть кола $\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y = x}$, розміщена в I октанті;

г) $\oint_L y dx - x dy$, де L – дуга еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

11.а) $\int_{L_{AB}} xy dx + (y-x) dy$, де L_{AB} – дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $A(0,0)$ до

точки $B(1,1)$;

б) $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L – перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$;

в) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{x-z}$, де L_{AB} – відрізок прямої $z = -\frac{x}{2}$, $y = 0$, що з'єднує точки $A(2,0,-1)$ і

$B(4,0,-2)$;

г) $\oint_L x dy$, де L – контур трикутника, утвореного прямими $y = x$, $x = 2$, $y = 0$ при позитивному напрямку обігу контуру.

12.а) $\int_{L_{ABC}} x^2 + y^2 dx + x + y^2 dy$, де L_{ABC} – ламана ABC , $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$;

б) $\int_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L_{OA} – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0)$ та $A(1,2)$;

в) $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

г) $\int_L x dy$, де L – дуга синусоїди $y = \sin x$ від точки $(\pi, 0)$ до точки $(0, 0)$.

13.а) $\int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$, де L_{OB} – відрізок прямої OB : $O(0,0,0)$, $B(-2,4,5)$;

б) $\int_L \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \frac{xy}{2} dl$, де L – дуга кривої $\rho = 9 \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$;

в) $\int_L (x-y) dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$;

г) $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – верхня половина еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ у додатному

напрямку параметра.

14. а) $\int_{L_{OB}} (xy - y^2)dx + xdy$, де L_{OB} – дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ між точками $O(0;0)$ та $B(1,2)$;
- б) $\int_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$;
- в) $\int_L \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $\underbrace{x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt}$;
- г) $\int_{L_{OA}} ydx + xdy$, де L – дуга $\underbrace{x = R \cos t, y = R \sin t}$, $O(R,0)$, $A(0,R)$.
15. а) $\int_{L_{OA}} xydx + (y - x)dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y^2 = x$ між точками $O(0;0)$ та $A(1,1)$;
- б) $\int_{L_{ABO}} (x + y)dl$, де L_{ABO} – контур трикутника з вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$;
- в) $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $\underbrace{x = a \cos t, y = a \sin t, z = at}$;
- г) $\int_L xdx + xydy$, де L – дуга верхньої половини кола $x^2 + y^2 = 2x$ при додатному напрямку обігу контуру.
16. а) $\int_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, де L_{AB} – відрізок прямої AB : $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$;
- б) $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $\underbrace{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t}$;
- в) $\int_L (x - y)dx + dy$, де L – дуга верхньої половини кола $x^2 + y^2 = R^2$, в додатному напрямку обігу контуру;
- г) $\int_L \sqrt{y^2 + x^2} dl$, де L – розгортка кола $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
17. а) $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 ydy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$ між точками $A(1,0)$, $B(0,2)$;
- б) $\int_{L_{OAB}} (x + y)dl$, де L_{OAB} – контур трикутника з вершинами $O(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$;
- в) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0,2)$ і $B(4,0)$;

г) $\oint_L (x^2 - y)dx$, де L – контур прямокутника, утвореного прямими $x = 0$, $y = 0$,

$x = 1$, $y = 2$, при позитивному напрямку обходу контуру.

18.а) $\int_{L_{OB}} xydx + y - x dy$, де L_{OB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0,0)$ до точки

$B(1,1)$;

б) $\int_L (x + y)dl$, де L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$;

в) $\int_L \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, $z = t$;

г) $\int_{L_{OB}} 4\sin^2 y dx + y \cos 2x dy$, де L_{OB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0)$ і

$B(3,6)$.

19.а) $\int_{L_{OB}} (xy - y^2)dx + x dy$, де L_{OB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0,0)$ до точки

$B(1,1)$;

б) $\oint \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2y$;

в) $\int_{L_{OABC}} yz dl$, де L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами у точках $O(0,0,0)$,

$A(0,4,0)$, $B(0,4,2)$, $C(0,0,2)$;

г) $\int_L y dx + x dy$, де L – дуга еліпса $x = 6\cos t$, $y = 4\sin t$, при позитивному

напрямку обходу контуру.

20.а) $\int_{L_{AB}} x dy - y dx$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, від точки $A(2,0)$ до

точки $B(0,2)$;

б) $\int_{L_{OABC}} xy dl$, де L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами $O(0,0)$, $A(5,0)$,

$B(5,3)$, $C(0,3)$;

в) $\int_L x^2 dl$, де L – дуга верхньої частини кола $x^2 + y^2 = a^2$;

г) $\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy$, де L_{OA} – дуга параболи $x = 2y^2$ від точки $O(0,0)$ до точки

$A(2,1)$.

21.а) $\int_{L_{AB}} (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2 dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $A(0,0)$ до точки

$B(1,2)$;

б) $\oint_L (x^2 + y^2)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4x$;

в) $\oint_L x^2 + y^2 + z^2 dl$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$,
 $z = 3t$;

г) $\int_{L_{AB}} xye^x dx + (x-1)e^x dy$, де L_{AB} – будь-яка лінія, що з'єднує точки $A(0,2)$ і $B(1,2)$.

22.а) $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 y dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB , $A(1,0)$ і $B(0,2)$;

б) $\oint_{L_{AB}} 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y} dl$, де L – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ між точками $A(1,0)$ і

$B(0,1)$;

в) $\int_L y dl$, де L – дуга параболи $y^2 = 6x$, відсічена параболою $x^2 = 6y$;

г) $\oint_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(0,0)$;

$B(1,0)$; $C(0,1)$ при позитивному напрямку обігу контуру.

23.а) $\int_{L_{AB}} 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz$, де L_{AB} – дуга одного витка гвинтової лінії $x = \cos t$,

$y = \sin t$, $z = 2t$, $A(1,0,0)$, $B(1,0,4)$;

б) $\int_L xy dl$, де L – контур квадрата зі сторонами $x = \pm 1$, $y = \pm 1$;

в) $\int_{L_{AB}} x dl$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(2,4)$ до точки $B(1,1)$;

г) $\oint_{L_{ABO}} (xy - x)dx + \frac{x^2}{2} dy$, де L_{ABO} – ламана ABO : $O(0,0)$; $A(1,2)$; $B(1/2,3)$ при

позитивному напрямку обігу контуру.

24.а) $\int_{L_{AB}} \frac{y}{x} dx + x dy$, де L_{AB} – дуга лінії $y = \ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$;

б) $\int_L y^2 dl$, де L – перша арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$;

в) $\int_L (x + y) dl$, де L – перший виток лемніскати $\rho^2 = 7\cos^2 \varphi$;

г) $\int_{L_{OA}} (xy - y^2)dx + xdy$, де L_{OA} – відрізок прямої від точки $O(0,0)$ до точки $A(1,2)$.

25. а) $\oint_L ydx - xdy$, де L – дуга еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ у позитивному напрямку обігу контуру;

б) $\int_{L_{ABCD}} xydl$, де L_{ABCD} – контур прямокутника з вершинами $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$;

в) $\int_L (x + y)dl$, де L – перший виток лемніскати $\rho^2 = 7\cos^2 \varphi$;

г) $\int_{L_{OA}} xdy - ydx$, де L_{OA} – дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(2,8)$.

26. а) $\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = \frac{x^2}{4}$ між точками $O(0,0)$ та $A(2,1)$;

б) $\int_L ydl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$, відсічена параболою $x^2 = 2y$;

в) $\int_L y^2dl$, де L – перша арка циклоїди $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$;

г) $\int_{L_{AB}} 2y \sin 2x dx - \cos 2x dy$, де L_{AB} – будь-яка лінія від точки $A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ до точки $B\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$.

27. а) $\int_{L_{AB}} x^2 + y^2 dx + x^2 - y^2 dy$, де L_{AB} – ламана лінія $y = |x|$, від точки $A(-1,1)$ до точки $B(2,2)$;

б) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{x - y}$, де L_{AB} – відрізок прямої між точками $A(4,0)$ і $B(6,1)$;

в) $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L – розгортка кола $x = 6(\cos t + t \sin t)$, $y = 6(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

г) $\int_{L_{OB}} (xy - x)dx + \frac{x^2}{2}dy$, де L_{OB} – дуга параболи $y = 4x^2$ між точками $O(0,0)$ і

$B(1,4)$.

28.а) $\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$, де L_{OA} – відрізок прямої OA : $O(0,0,0)$, $A(2,1,-1)$;

б) $\int_L x^2 + y^2 \, dl$, де L – перша чверть кола $\rho = 2$;

в) $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = 9\cos t$, $y = 9\sin t$, $z = 9t$;

г) $\int_{L_{AB}} (x+y)dx + (x-y)dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ між точками $A(0,-a)$ і $B(1,1)$.

29.а) $\oint_L xdy - ydx$, де L – контур трикутника з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$

при позитивному напрямку обігу контуру;

б) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1,1,1)$ і $B(2,2,2)$;

в) $\oint_L x^2 + y^2 \, dl$, де L – коло $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$;

г) $\int_{L_{AB}} (x+y)dx + (x-y)dy$, де L_{AB} – дуга правого півкола $x^2 + y^2 = a^2$ від точки $A(0,-a)$ до точки $B(0,a)$.

30.а) $\int_{L_{ACB}} x^2 + y \, dx + x + y^2 \, dy$, де L_{ACB} – ламана ACB : $A(2,0)$, $C(5,0)$, $B(5,3)$;

б) $\oint_L (x-y)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2x$;

в) $\int_L ydl$, де L – дуга параболи $y^2 = 12x$, відсічена параболою $x^2 = 12y$;

г) $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – дуга верхньої половини еліпса $x = 5\cos t$, $y = 2\sin t$ у додатньому напрямку обігу контуру.

Завдання 20 Показати, що даний вираз є повним диференціалом функції $U(x, y)$. Знайти функцію $U(x, y)$.

1. $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$.

2. $\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2} - 3 \right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2} - 5 \right)dy$.

3. $-\left(\frac{1}{2}\cos 2y + y\sin 2x\right)dx + x\sin 2y + \cos^2 x + 1 \, dy.$
4. $y^2e^{xy^2} + 3 \, dx + 2xye^{xy^2} - 1 \, dy.$
5. $\left(\frac{1}{x+y} + \cos x \cos y - 3x^2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} - \sin x \sin y + 4y\right)dy.$
6. $\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right)dy.$
7. $e^{x+y} - \cos x \, dx + e^{x+y} + \sin y \, dy.$
8. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2x\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 6y\right)dy.$
9. $e^{xy} + xye^{xy} + 2 \, dx + x^2e^{xy} + 1 \, dy.$
10. $ye^{xy} + y^2 \, dx + xe^{xy} + 2xy \, dy.$
11. $(y\cos(xy) + 2x - 3y)dx + (x\cos(xy) - 3x + 4y)dy.$
12. $y\sin x + y + xy\cos x + y - 9x^2 \, dx + x\sin x + y + xy\cos x + y + 2y \, dy.$
13. $5y + \cos x + 6xy^2 \, dx + 5x + 6x^2y \, dy.$
14. $y^2e^{xy} - 3 \, dx + e^{xy} + 1 + xy \, dy.$
15. $1 + \cos xy \, ydx + 1 + \cos xy \, xdy.$
16. $y - \sin x \, dx + x - 2y\cos y^2 \, dy.$
17. $\left(\sin 2x - \frac{1}{x^2y}\right)dx - \frac{1}{xy^2}dy.$
18. $\frac{x+y}{xy}dx + \frac{y-x}{y^2}dy.$
19. $20x^3 - 21x^2y + 2y \, dx + 3 + 2x - 7x^3 \, dy.$
20. $ye^{xy} - 2\sin x \, dx + xe^{xy} + \cos y \, dy.$
21. $y e^{xy} + 5 \, dx + x e^{xy} + 5 \, dy.$
22. $\left(x - \frac{y}{x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2y^2} - y\right)dy.$

$$23. \frac{x \ln y + y}{x} dx + \frac{y \ln x + x}{y} dy.$$

$$24. e^{x-y} (1+x+y) dx + e^{x-y} (1-x-y) dy.$$

$$25. (3x^2 - 2xy + y) dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y) dy.$$

$$26. (2xe^{x^2-y^2} - \sin x) dx + (\sin y - 2ye^{x^2-y^2}) dy.$$

$$27. \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + x^2 \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + y \right) dy.$$

$$28. \frac{1-y}{x^2y} dx + \frac{1-2x}{xy^2} dy.$$

$$29. \left(\frac{1}{y-1} - \frac{y}{(x-1)^2} - 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{(y-1)^2} + 2y \right) dy.$$

$$30. (3x^2 - 2xy + y^2) dx + (2xy - x^2 - 3y^2) dy.$$

СТОРІНКА ЗАУВАЖЕНЬ І ПРОПОЗИЦІЙ

Варіанти контрольних робіт з навчальної дисципліни «Вища математика» за темами: «Функції кількох змінних», «Інтегральне числення» для студентів I курсу денної та заочної форм навчання з технічних спеціальностей (II семестр)

Укладачі: проф. В.П. Ляшенко, доц. В.М. Сапцін, доц. Г.В. Славко, доц. Н.Г. Кирилах, старш. викл. Т.А. Набок, асист. А.І. Дерієнко

Відповідальний за випуск Ю.П. Глухов

Видавничий відділ КДПУ

Тираж 50 прим.